Examen regional

Apellidos, Nombres: ____________________

Escuela, Sede: ____________________

Instrucciones: En todos los problemas debes responder correctamente las preguntas, debes escribir también el procedimiento que utilizaste para resolverlos.

1. Encuentra la mayor potencia de 3 que divide a 999999999.

   Solución Factorizamos en primos al número $N = 999999999$, para ello nos damos cuenta, que la suma de sus dígitos es 81 que es un múltiplo de 3. El resultado de esta división es 333333333 cuya suma de dígitos es 27 que también es múltiplo de 3 por lo que al dividir obtenemos 111111111 cuya suma de dígitos es igual a 9 por lo que también es divisible por 3, el número que obtenemos es 37037037, al sumar sus dígitos resulta 30 que es un múltiplo de 3 por lo que también se puede dividir obteniendo 12345679, si realizamos la suma de los dígitos de este nuevo número obtenemos 37 que no es divisible por 3, por lo tanto la mayor potencia que divide a 999999999 es 3^4.

2. Sofía, Ian y Aby ayudaron a sus abuelos a cosechar manzanas, peras y ciruelas. Cada niño cosechó un tipo de fruta. En la tarde pesaron sus canastas quedando de la siguiente forma:

   Los abuelos quieren saber quien recogió cada fruta. Los niños les dieron pistas para descubrirlo, cada uno dijo dos afirmaciones, de las cuales una es falsa y una es verdadera.

   Sofía dijo:

   1. Yo fui quien mas cosechó.
   2. Yo coseché en total un número par de kilogramos.

   Ian dijo:

   1. Yo coseché dos canastas.
   2. Yo no fui quien mas cosechó.

   Aby dijo:

   1. Yo fui quien mas cosechó.
   2. El número de kilogramos que yo coseché es un nmero divisible entre 4.

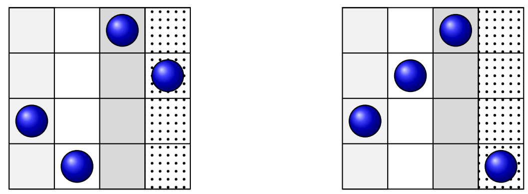
   ¿Cuál niño cosechó cuál fruta?

   Solución. De los datos dados se tiene que en total se cosecharon $94Kg$ de manzana, $68Kg$ de peras y $47Kg$ de ciruelas.

   No es posible que la afirmación 1 de Sofía sea verdadera y la 2 falsa, ya que si ella cosechó mas, habría

cosechado manzanas y sí es un número par de kilogramos, quedando la afirmación 2 verdadera también. Así las afirmaciones de Sofía quedan la primera falsa y la segunda verdadera.
La afirmación 1 de Sofía falsa implica que la afirmación 1 de Aby es verdadera por lo tanto ella cosechó las manzanas ($94Kg$) lo cual hace su afirmación 2 falsa.
La segunda afirmación de Sofía que es verdadera implica que Sofía cosechó peras ($68Kg$). Así Ian cosechó ciruelas, quedando su afirmación 1 falsa y la afirmación 2 verdadera.

3. Se ponen cuatro fichas en un tablero de 4×4. Se dice que las fichas estan en posición *libre* si para cada una de las fichas se cumple que tanto en su fila como en su columna no quedó alguna de las otras tres fichas. Los dos siguientes son ejemplos en las que las fichas quedaron en posición libre. ¿De cuántas maneras se pueden poner las 4 fichas en el tablero de tal manera que queden en posición libre?



Solución. La observación principal es que al ser 4 fichas que deben quedar en diferentes columnas, las cuatro columnas del tablero deben uilizarse; por lo tanto el contar los arreglos puede hacerse de la siguiente manera: Se empieza por decidir en qué posición de la primera columna debe ponerse la primera ficha, hay 4 opciones en total. Una vez puesta la primera ficha, procedemos a decidir en qué posición de la segunda columna colocaremos la segunda ficha, hay para esto solo 3 opciones pues una fila ya no es elegible (la fila que corresponde a la de la primera ficha puesta). Se continua del mismo modo: La tercera ficha tiene solo dos posiciones elegibles de la tercera columna y la cuarta ficha solo una posible posición. La respuesta es entonces, hay $4(3)(2)(1) = 24$ maneras de colocar las fichas en posición libre.

4. Una pulga esta parada en el origen $(0, 0)$ de un sistema de coordenadas. El sistema es una cuadrícula donde los puntos de interseccion (m, n) tienen coordenadas enteras. La pulga solo se mueve en las intersecciones de la cuadrícula de dos formas:
Forma 1: una salto hacia la derecha y 3 hacia arriba.
Forma 2: dos saltos hacia la izquierda y 4 hacia abajo.
¿Es posible que la pulga llegue al punto $(10, 2018)$ partiendo desde el origen? Si si es posible, describe como puede hacerlo. Si no, justifica porque no es posible.

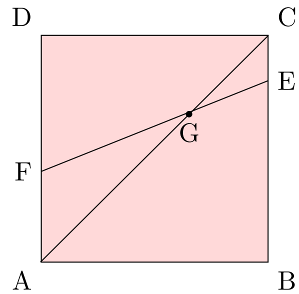
Solución. Llamemos a al número de veces que la pulga usa la forma 1 para moverse y b al número de veces que usa la forma 2.
Debemos resolver el sistema

$$a - 2b = 10$$
$$3a - 4b = 2018$$

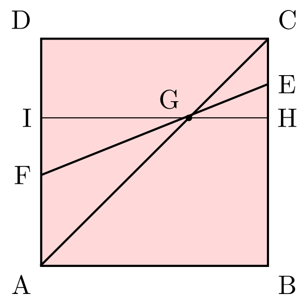
El cual tiene solución $a = 1998$ y $b = 994$.
Por lo tanto la pulga si puede alcanzar el punto $(10, 2018)$ y es moviendose 1998 veces de la forma 1 y 994 veces de la forma 2.

5. En la siguiente figura $ABCD$ es una figura de lado $10cm$. E y F están sobre los lados BC y AD, respectivamente, tales que $CE = 1cm$, $FA = 4cm$. G es el punto de intersección del segmento FE y la

diagonal AC. ¿Cuál el área en cm^2 del cuadrilátero $FGCD$?



Solución. Trazamos la perpendicular a CB que pasa por G. Sean I y H las intersecciones de dicha perpendicular con los lados AD y BC.



Observamos que IG y GH son alturas de los triángulos FAG y ECG, respectivamente. Dichos triángulos son semejantes: $\measuredangle FGA = \measuredangle EGC$ por ser opuestos por el vértice y $\measuredangle FAG = \measuredangle DAC = 45° = \measuredangle BCA = \measuredangle ECG$. La razón de proporción es igual a $\frac{FA}{CE} = \frac{4}{1} = 4$. Esto implica que las alturas sobre FA y CE cumplen $\frac{IG}{GH} = 4$. Entonces $10 = DC = IG + GH = 4GH + GH = 5GH$, de donde $GH = 2, IG = 8$. Ahora podemos calcular el área del triángulo FAG:

$$(FAG) = \frac{FA \cdot IG}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16,$$

Por lo tanto

$$(FGCD) = (ACD) - (FAG) = \frac{10 \cdot 10}{2} - 16 = 34.$$